# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**


MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 4 luglio* 1909.

Matematica. — *Sopra la teoria dei moduli di forme algebriche.* Nota 3ª del Socio E. Bertini.

Nella introduzione alla Nota 2ª (1) si è accennato ad un teorema del piano, più generale di quello che fu esteso ad $S_r$ nel n. 4 della Nota stessa. Qui si estende pure ad $S_r$ quel teorema generale deducendolo, con semplici considerazioni, appunto dal caso particolare del detto n. 4.

1. Si vuole cioè dimostrare il seguente teorema:

*Se r ipersuperficie* $F_1, F_2, \dots, F_r$ *hanno soltanto punti* $P_i$ *comuni che sieno* $(s_1^{(i)} s_2^{(i)} \dots s_r^{(i)} \alpha^{(i)})$ *ed* F *è una tale ipersuperficie che per ciascun punto* $P_i$ *esistano ipersuperficie* $B^{(i)}, A_1^{(i)}, \dots, A_r^{(i)}$ *di ordini opportuni e delle quali* $B^{(i)}$ *non passi per* $P_i$, *così che la ipersuperficie*

$$B^{(i)}F + A_1^{(i)}F_1 + A_2^{(i)}F_2 + \dots + A_r^{(i)}F_r = 0 \qquad (1)$$

*abbia in* $P_i$ *la moltiplicità*

$$\sigma^{(i)} = \alpha^{(i)} - s_1^{(i)} s_2^{(i)} \dots s_r^{(i)} + s_1^{(i)} + s_2^{(i)} + \dots + s_r^{(i)} - r + 1,$$

*la* F *appartiene al modulo delle* $F_1, F_2, \dots, F_r$.

Premesso che nella (1) la $B^{(i)}$ si può immaginare di ordine tanto alto quanto si vuole, bastando a tale scopo di moltiplicare la (1) per una forma

(1) Nel n. 1 di questa Nota 2ª deve scriversi sempre $s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \dots, s_r^{(1)}$ invece di $s_1, s_2, \dots, s_r$.

*generica*, osserviamo poi che si può anche ritenere che la stessa ipersuperficie $B^{(i)}$ non passi per *alcun* punto $P_i$. Così se $B^{(1)}$, ad es., che non passa per $P_1$ secondo l'enunciato del teorema, passasse per alcuni degli altri punti $P_i$, aggiungeremmo al primo membro della (1), fattovi $i = 1$, un prodotto $\beta^{(1)}F$, essendo $\beta^{(1)}$ una ipersuperficie (composta, ad es., di coni ed iperpiani) d'ordine opportunamente alto (eguale all'ordine di $B^{(1)}$), così che essa abbia in $P_1$ la moltiplicità $\sigma^{(1)}$ (almeno), non passi per alcuno dei detti punti $P_i$, pei quali passa $B^{(1)}$, e passi per i rimanenti, pei quali non passa $B^{(1)}$. Allora è evidente che la $B^{(1)} + \beta^{(1)}$, che viene a comparire nella (1) invece di $B^{(1)}$, è una ipersuperficie che non passa per alcun punto $P_i$.

Oltre a ciò, possiamo supporre tutte le $B^{(i)}$ eguali, il che, se non fosse, si ottiene moltiplicando la (1) per il prodotto $B^{(1)} \dots B^{(i-1)} . B^{(i+1)} \dots$

Sicchè, senza alcuna limitazione, l'ipotesi del teorema equivale a questa altra, che per ogni punto $P_i$ si abbia una ipersuperficie

$$(2) \qquad BF + A_1^{(i)}F_1 + A_2^{(i)}F_2 + \cdots + A_r^{(i)}F_r = 0$$

avente in esso moltiplicata $\sigma^{(i)}$, *essendo* B *una stessa ipersuperficie per tutti i punti* $P_i$, *la quale non passa per alcuno di questi punti.*

Prendasi, in relazione a ciascun punto $P_i$, una ipersuperficie $\Phi_i$ (composta, ad es., di coni) di ordine abbastanza elevato (il medesimo per tutti i punti $P_i$), la quale non passi per il punto $P_i$ ed abbia in ogni altro punto $P_i$ la moltiplicità $\sigma^{(i)}$. La ipersuperficie che si ottiene moltiplicando la (2) per $\Phi_i$ soddisfa manifestamente alla condizione del teorema del n. 4 (Nota 2ª): onde la ipersuperficie

$$\Phi_i(BF + A_1^{(i)}F_1 + \cdots + A_r^{(i)}F_r) = 0$$

appartiene al modulo $(F_1 F_2 \dots F_r)$. Segue che a questo modulo appartiene anche la

$$\Phi_i BF = 0$$

ed anche, sommando tutte queste equazioni, la ipersuperficie

$$F . B(\Phi_1 + \Phi_2 + \cdots) = 0 .$$

Ma, per la scelta fatta delle $\Phi_i$, la ipersuperficie data dalla somma fra le parentesi non passa per alcuno dei punti $P_i$: e però, ciò essendo anche per la ipersuperficie B, dalla precedente segue, in virtù di un teorema noto [1], che F appartiene al modulo $(F_1 F_2 \dots F_r)$: c. d. d.

[1] Severi, *Su alcune proprietà...*, n, 4, già citato nella Nota 1ª.

2. Con considerazione analoga a quella del n. 5 della Nota 2ª si trova, come estensione del precedente teorema, quest'altro: *Se* $h(<r)$ *ipersuperficie* $F_1, F_2, \dots, F_h$ *si segano in una* $\Phi_{r-h}$ *qualsiasi e per ciascuna sua parte irriducibile, che sia* $(s_1 s_2 \dots, s_h \alpha)$, *esistono ipersuperficie* $B, A_1, \dots, A_h$, *delle quali* B *non contenga quella parte, così che la ipersuperficie*

$$BF + A_1F_1 + \cdots + A_hF_h = 0 \tag{3}$$

*abbia la parte stessa multipla secondo il numero*

$$\alpha - s_1 s_2 \dots s_h + s_1 + s_2 + \cdots + s_h - h + 1, \tag{4}$$

F *appartiene al modulo* $(F_1 F_2 \dots F_h)$.

3. Infine si può trarre dai due teoremi precedenti il seguente: *Se* $h(\leq r)$ *ipersuperficie* $F_1, F_2, \dots, F_h$ *si segano in una* $\Phi_{r-h}$ *qualsiasi e per ciascuna sua parte irriducibile (o punto se* $r = h$*), che sia* $(s_1 s_2 \dots s_h \alpha)$, *esistono ipersuperficie* $B, A_1, \dots, A_h$, *delle quali* B *non contenga quella parte, così che la ipersuperficie* (3) *passi comunque per la parte stessa,* $F^\sigma$ *appartiene al modulo* $(F_1 F_2 \dots F_h)$, *essendo* $\sigma$ *non minore del massimo dei numeri* (4).

Infatti, elevando ciascuna (3) alla potenza $\sigma$, si hanno evidentemente per $F^\sigma$ le ipotesi dei teoremi dei n. 1, 2.

Matematica. — *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta^{2i}U = 0$ *per le aree piane.* Nota del Corrispondente G. Lauricella.

Nella mia comunicazione al IV Congresso internazionale dei Matematici (Roma, 6-11 aprile 1908) indicavo un metodo atto a integrare l'equazione $\Delta^{2i}U = 0$, per dati valori al contorno di U e delle sue derivate normali dei primi $i - 1$ ordini, ed equazioni ancora più generali. Ivi limitavo i miei calcoli, per dimostrare il teorema di esistenza, al caso di $i = 3$ e delle *tre* dimensioni; però essi possono estendersi al caso di $i$ qualsiasi e di un numero qualunque di dimensioni. Il detto metodo è la generalizzazione di quello che avevo dato circa un anno prima per il caso di $i = 2$ e delle *tre* dimensioni (1).

Ancora prima della pubblicazione di questo caso, ero in possesso, per $i = 2$ e per le *due* dimensioni, di un metodo del tutto diverso e più diretto, pubblicato ora nel vol. 32 degli Acta Mathematica (2). Questo metodo, che caratterizza il caso delle *due* dimensioni e che suggerisce l'estensione di

(1) *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta^4 V = 0$. Rend. Acc. Lincei, vol. XVI, 2° sem.

(2) *Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.*

concetti notorii nella teoria delle funzioni armoniche sul piano [1], si generalizza al caso di $i$ qualsiasi.

Mi limito qui a comunicare i punti essenziali di tale generalizzazione, riserbandomi di svilupparne i dettagli in una prossima Memoria.

## Teoremi di trasformazione.

1. Sia C una linea piana chiusa, la quale non si intersechi. Riferiamo i punti di C ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $x, y$; ed indichiamo con $\sigma$ l'area piana finita limitata da C, con $\sigma'$ l'area piana infinita pure limitata da C, con $s$ l'arco variabile della curva C, contato a partire da un punto fisso arbitrario, e con $n$ la normale nei punti di C. In ogni punto di C possiamo fissare la direzione positiva della normale $n$ e la direzione positiva della tangente in modo che, posto:

$$\lambda = \cos \widehat{nx} = \frac{dx}{dn} \quad , \quad \mu = \cos \widehat{ny} = \frac{dy}{dn} ,$$

risulti:

$$\cos \widehat{sx} = \frac{dx}{ds} = \mu \quad , \quad \cos \widehat{sy} = \frac{dy}{ds} = -\lambda . \tag{1}$$

Introdotte le notazioni:

$$\frac{d^t}{dn^t} = \frac{\partial^t}{\partial x^t}\lambda^t + \binom{t}{1}\frac{\partial^t}{\partial x^{t-1}\,\partial y}\lambda^{t-1}\mu + \cdots + \binom{t}{t-1}\frac{\partial^t}{\partial x\,\partial y^{t-1}}\lambda\mu^{t-1} + \frac{\partial^t}{\partial y^t}\mu^t ,$$

$$\frac{d^t}{ds^t} = \frac{\partial^t}{\partial x^t}\left(\frac{dx}{ds}\right)^t + \binom{t}{1}\frac{\partial^t}{\partial x^{t-1}\,\partial y}\left(\frac{dx}{ds}\right)^{t-1}\frac{dy}{ds} + \cdots +$$

$$+ \binom{t}{t-1}\frac{\partial^t}{\partial x\,\partial y^{t-1}}\frac{dx}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right)^{t-1} + \frac{\partial^t}{\partial y^t}\left(\frac{dy}{ds}\right)^t ,$$

si ha per una funzione qualsiasi $U(x, y)$ che *i valori nei punti di* C *di* $\frac{\partial^{i-1}U}{\partial x^{i-1}}, \frac{\partial^{i-1}U}{\partial x^{i-2}\,\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{i-1}U}{\partial y^{i-1}}$ *si possono esprimere linearmente ed omogeneamente per mezzo di* $\frac{d^{i-1}U}{ds^{i-1}}, \frac{d^{i-2}}{ds^{i-2}}\left(\frac{dU}{dn}\right), \ldots, \frac{d^{i-1}U}{dn^{i-1}}$.

2. Date ad arbitrio $i$ funzioni dei punti di C: $\alpha_1(s), \alpha_2(s), \ldots, \alpha_i(s)$, e posto: $U = \alpha_1(s), \frac{dU}{dn} = \alpha_1(s), \ldots, \frac{d^{i-1}U}{dn^{i-1}} = \alpha_i(s)$, si indichino rispettivamente con $a_1(s), a_2(s), \ldots, a_i(s)$ i valori nei punti di C di

$$\frac{\partial^{i-1}U}{\partial x^{i-1}}, \frac{\partial^{i-1}U}{\partial x^{i-2}\,\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{i-1}U}{\partial y^{i-1}} .$$

[1] Simile osservazione può farsi ancora per equazioni più generali. Cfr. ad es. Lauricella, *Sulle equazioni della deformazione delle piastre elastiche cilindriche*, § 5, Rend. Acc. Lincei, vol. XIV, 1° sem.

Sia $U_1(x, y)$ integrale delle equazioni:

$$(2)\quad \begin{cases} \text{(nei punti di } \sigma \text{ o di } \sigma') \quad \Delta^{2i} U_1 = 0, \\ \text{(nei punti di C)} \quad \dfrac{\partial^{i-1} U_1}{\partial x^{i-1}} = a_1(s), \dfrac{\partial^{i-1} U_1}{\partial x^{i-2}\,\partial y} = a_2(s), \ldots, \dfrac{\partial^{i-1} U_1}{\partial y^{i-1}} = a_i(s). \end{cases}$$

Se $P(x, y)$ è un polinomio qualsiasi di grado $i-2$ in $x, y$, l'espressione:

$$U'(x, y) = U_1(x, y) + P(x, y)$$

sarà pure un integrale delle equazioni (2); e si dimostra che *si può determinare il polinomio* $P(x, y)$ *in modo che nei punti di* C *risulti*:

$$U' = a_1(s), \frac{dU'}{dn} = a_2(s), \ldots, \frac{d^{i-1} U'}{dn^{i-1}} = a_i(s).$$

Quindi *l'integrazione delle equazioni*:

$$(2)'\quad \begin{cases} \text{(nei punti di } \sigma \text{ o di } \sigma') \quad \Delta^{2i} U = 0, \\ \text{(nei punti di C)} \quad U = a_1(s), \dfrac{dU}{dn} = a_2(s), \ldots, \dfrac{d^{i-1} U}{dn^{i-1}} = a_i(s) \end{cases}$$

*si può fare dipendere dall'integrazione delle equazioni* (2).

3. Posto:

$$u_1(x, y) = \frac{\partial^{i-1} U_1}{\partial x^{i-1}}, u_2(x, y) = \frac{\partial^{i-1} U_1}{\partial x^{i-2}\,\partial y}, \ldots, u_i(x, y) = \frac{\partial^{i-1} U_1}{\partial y^{i-1}},$$

$$\theta = \frac{\partial^{i-1} u_1}{\partial x^{i-1}} + \binom{i-1}{1} \frac{\partial^{i-1} u_2}{\partial x^{i-2}\,\partial y} + \cdots + \binom{i-1}{i-2} \frac{\partial^{i-1} u_{i-1}}{\partial x\,\partial y^{i-2}} + \frac{\partial^{i-1} u_i}{\partial y^{i-1}},$$

risulterà dalle (2):

$$(A)\quad \begin{cases} \text{(nei punti di } \sigma \text{ o di } \sigma') \quad (3) \quad \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x}, \dfrac{\partial u_2}{\partial y} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial u_{i-1}}{\partial y} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x}, \\ \qquad\qquad (4) \quad \Delta^2 \theta = 0, \\ \text{(nei punti di C)} \quad u_1 = a_1(s), u_2 = a_2(s), \ldots, u_i = a_i(s). \end{cases}$$

Le equazioni (3), nel caso dell'area finita $\sigma$, dànno come conseguenza le $\dfrac{i(i-1)}{2}$ condizioni:

$$(5)\quad \int_C \left\{ a_r \cos^t \widehat{sx} + \binom{t}{1} a_{r+1} \cos^{t-1} \widehat{sx} \cdot \cos \widehat{sy} + \cdots + a_{r+t} \cos^t \widehat{sy} \right\} ds = 0,$$

$$(t = 1, 2, \ldots, i-1 \;;\; r = 1, 2, \ldots, i-t)$$

le quali sono necessarie e sufficienti per la monodromia della funzione $U_1$ e delle sue derivate dei primi $i-2$ ordini.

Sussiste il seguente teorema: *l'integrazione delle equazioni* (2) *si può ricondurre all'integrazione delle equazioni* (A), *e viceversa.*

## Teoremi di unicità.

4. Posto:

$$\theta_t = \frac{\partial u_t}{\partial x} + \frac{\partial u_{t+1}}{\partial y},$$

risulta dalle (3):

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial y} = \frac{\partial \theta_{t+1}}{\partial x}.$$

Introduciamo le $i-1$ funzioni $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$ [1] determinate dalle equazioni:

$$(6)\quad (i-1)\frac{\partial \theta_t}{\partial y} = (i-1)\frac{\partial \theta_{t+1}}{\partial x} = (-1)^t (i-t-1)\frac{\partial v_{i-t-1}}{\partial y} + (-1)^t t \frac{\partial v_{i-t}}{\partial x},$$
$$(t = 0, 1, 2, \dots, i-1)$$

le quali, come si può provare, *equivalgono ad un sistema completamente integrabile.* Dalle (3) e dalle (6) risulta:

$$\binom{\text{nei punti di } \sigma}{\text{o di } \sigma'} \binom{i-1}{t-1} \Delta^2 u_t + (-1)^t \binom{i-2}{t-1} \frac{\partial v_{i-t}}{\partial y} + (-1)^t \binom{i-2}{t-2} \frac{\partial v_{i-t+1}}{\partial x} = 0.$$

Da queste equazioni, introducendo convenienti coefficienti costanti $b_{t,r}$, e facendo percorrere all'indice $p$ tutti i numeri dispari non superiori ad $i$, all'indice $q$ tutti i numeri pari non superiori ad $i$, si ottiene, mediante opportune integrazioni per parti,

$$(7)\quad 0 = \int_\sigma \Big[ \Big\{ \Sigma_p (-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{i-1}{p-1} \frac{\partial u_p}{\partial x} + \Sigma_q (-1)^{\frac{q}{2}} \binom{i-1}{q-1} \frac{\partial u_q}{\partial y} \Big\}^2 + \Big\{ \Sigma_p (-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{i-1}{p-1} \frac{\partial u_p}{\partial y} - \Sigma_q (-1)^{\frac{q}{2}} \binom{i-1}{q-1} \frac{\partial u_q}{\partial x} \Big\}^2 \Big] d\sigma + \int_c \sum_1^i {}_t\, u_t \, X_t \, ds,$$

[1] Queste $v$ rappresentano un'estensione del concetto di *funzione armonica coniugata.*

dove:

$$(8)\quad X_t = \binom{i-1}{t-1}\frac{du_t}{dn} + \Sigma_r(-1)^{\frac{t+r+1}{2}}\left\{b_{tr} \pm \binom{i-1}{t-1}\binom{i-1}{r-1}\right\}\frac{du_r}{ds} + \\ + (-1)^t\left\{\binom{i-2}{t-1}v_{i-t}\cos\widehat{ny} + \binom{i-2}{t-2}v_{i-t+1}\cos\widehat{nx}\right\},$$

intendendo di prendere il segno $+$ e di estendere il sommatorio $\Sigma_r$ a tutti i numeri pari non superiori ad $i$ per $t$ dispari, di prendere il segno $-$ e di estendere il detto sommatorio a tutti i numeri dispari non superiori ad $i$ per $t$ pari.

Una formola (7)′ perfettamente analoga alla (7) si ha per l'area infinita $\sigma'$.

5. Si consideri il sistema (B) di equazioni formato dalle (3), (4) e dalle altre:

$$(9)\quad \begin{cases} \Sigma_p(-1)^{\frac{p-1}{2}}\binom{i-1}{p-1}\frac{\partial u_p}{\partial x} + \Sigma_q(-1)^{\frac{q}{2}}\binom{i-1}{q-1}\frac{\partial u_q}{\partial y} = 0, \\ \Sigma_p(-1)^{\frac{p-1}{2}}\binom{i-1}{p-1}\frac{\partial u_p}{\partial y} - \Sigma_q(-1)^{\frac{q}{2}}\binom{i-1}{q-1}\frac{\partial u_q}{\partial x} = 0; \end{cases}$$

e si ponga:

$$\beta_{r,s} = \begin{cases} 0 \text{ se } r+s \text{ è dispari,} \\ -\dfrac{1.3\ldots(2i-r-s-1).1.3\ldots(r+s-3)}{2.4\ldots(2i-2)} \text{ se } r+s \text{ è pari,} \end{cases}$$

$$u_r^{(s,t)} = \beta_{r,s}x^t + \binom{t}{1}\beta_{r,s+1}x^{t-1}y + \cdots + \binom{t}{t-1}\beta_{r,s+t-1}xy^{t-1} + \beta_{r,s+t}y^t.$$

$$(r = 1, 2, \ldots, i\ ;\ t = 0, 1, \ldots, i-1\ ;\ s = 1, 2, \ldots, i-t)$$

*Le i funzioni*:

$$(10)\qquad u_r = \sum_{s,t} a_{s,t}\,u_r^{(s,t)}, \quad (r = 1, 2, \ldots, i)$$

*nelle quali le* $a_{s,t}$ *rappresentano* $\dfrac{i(i+1)}{2}$ *coefficienti arbitrari, dànno il sistema più generale di integrali del sistema* (B).

6. Nel caso particolare in cui le $u_1, u_2, \ldots, u_i$ sono costanti, le equazioni (6) si integrano facilmente e le espressioni $X_t$ assumono una forma particolare $X_t^{(0)}$, contenente $\dfrac{i(i-1)}{2}$ costanti arbitrarie.

Ciò premesso, si hanno i seguenti teoremi di unicità:

*α) se* $u_1, u_2, \ldots, u_i$ *sono integrali delle equazioni* (3), (4) *nel campo finito* $\sigma$ *tali che* $a_1(s) = a_2(s) = \cdots = a_i(s) = 0$, *si avrà*:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad u_1 \ldots u_2 \ldots = u_i = 0;$$

$\beta$) *se* $u_1, u_2, \dots, u_i$ *sono un sistema di integrali delle equazioni* (3), (4) *nel campo* $\sigma$, *tale che*

$$\text{(nei punti di C)} \qquad X_t = X_t^{(0)},$$

*si avrà che queste* $u_1, u_2, \dots, u_i$ *devono necessariamente avere la forma* (10);

$\gamma$) *se* $u_1, u_2, \dots, u_i$ *sono integrali delle equazioni* (3), (4) *nel campo infinito* $\sigma'$, *tali che* $a_1(s) = a_2(s) = \cdots = a_i(s) = 0$, *e se a distanza infinita si annullano in modo che sia applicabile ad essi la formola* (7)', *si avrà*:

$$\text{(nei punti di } \sigma') \qquad u_1 = u_2 = \cdots = u_i = 0;$$

$\delta$) *se* $u_1, u_2, \dots, u_i$ *sono integrali delle equazioni* (3), (4) *nel campo infinito* $\sigma'$, *tali che* $X_1 = X_2 = \cdots = X_i = 0$, *e se a distanza infinita si annullano..., si avrà*:

$$\text{(nei punti di } \sigma') \qquad u_1 = u_2 = \cdots = u_i = 0.$$

## Studio di funzioni speciali.

7. Posto:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \quad , \quad u_{h.k} = \left(-\frac{\partial r}{\partial y}\right)^{2i-h-k} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^{h+k-2} \frac{d \log r}{dn},$$

si verifica che gli $i$ sistemi

$$u_{h.1}, u_{h.2}, \dots, u_{h.i}, \quad (h = 1, 2, \dots, i)$$

considerati come funzioni di $\xi$ $\eta$, formano $i$ sistemi di integrali delle equazioni (3), (4). Gli integrali delle corrispondenti equazioni (6) si calcolano facilmente; e con considerazioni notorie, si trova:

$$\text{(11)} \qquad \int_C u_{h.k}\, ds = 2\pi\beta_{h.k} \ , \ \pi\beta_{h.k} \ , \ 0,$$

secondo che il punto $(\xi, \eta)$ appartiene all'area finita $\sigma$, al contorno C, o all'area infinita $\sigma'$.

Sussiste poi la formola:

$$\text{(12)} \quad \begin{cases} \beta_{h.k}\,\xi^t + \binom{t}{1}\beta_{h.k+1}\,\xi^{t-1}\,\eta + \cdots + \binom{t}{t-1}\beta_{h.k+t-1}\,\xi\eta^{t-1} + \beta_{h.k+t}\,\eta^t = \\ \qquad = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C \left\{ u_{h.k}\,x^t + \binom{t}{1} u_{h.k+1}\,x^{t-1}y + \cdots + \right. \\ \qquad \left. + \binom{t}{t-1} u_{h.k+t-1}\,xy^{t-1} + u_{h.k+t}\,y^t \right\} ds. \\ (h = 1, 2, \dots, i \ ; \ t = 0, 1, \dots, i-1 \ ; \ k = 1, 2, \dots, i-t). \end{cases}$$

## Estensione dei doppî strati.

8. Supponiamo che la linea chiusa C sia tale che si possa fissare un limite superiore del numero dei punti in cui essa è tagliata da una retta qualsiasi del suo piano. Siano $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ..., $\varphi_i(s)$ funzioni finite e continue arbitrarie dei punti di C, sia $s_0$ un punto generico di C con tangente determinata. Indichiamo con $p$ o con $p'$ il punto $(\xi, \eta)$, secondo che appartiene a $\sigma$ o a $\sigma'$; ed indichiamo ancora con $u'_{h.k}(s, s_0)$ ciò che diviene $u_{h.k}$ quando il punto $(x, y) \equiv s$ varia su C e il punto $(\xi, \eta)$ coincide con $s_0 \equiv (\xi', \eta')$. Ciò premesso, sussistono, come estensione della nota formola di discontinuità di doppio strato, le seguenti formole:

$$(13)\quad \lim_{p=s_0} \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^{i-t} u_{h.t}\, \varphi_t(s)\, ds = \sum_1^{i-t} \beta_{h.t}\, \varphi_t(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^{i-t} u'_{h.t}(s, s_0)\, \varphi_t(s)\, ds,$$

$$(14)\quad \lim_{p'=s_0} \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^{i-t} u_{h.t}\, \varphi_t(s)\, ds = -\sum_1^{i-t} \beta_{h.t}\, \varphi_t(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^{i-t} u'_{h.t}(s, s_0)\, \varphi_t(s)\, ds.$$

Dalle (12), (13) segue:

$$(12)'\quad \begin{cases} \beta_{h.k}\, \xi'^t + \binom{t}{1} \beta_{h.k+1}\, \xi'^{t-1} \eta' + \cdots = \\ \qquad = \frac{1}{\pi} \int_C \left\{ u'_{h.k}(s, s_0)\, x^t + \binom{t}{1} u'_{h.k+1}(s, s_0)\, x^{t-1} y + \cdots \right\} ds. \\ (h = 1, 2, \ldots, i\ ;\ t = 0, 1, \ldots, i-1\ ;\ k = 1, 2, \ldots, i-t). \end{cases}$$

9. Le $i$ funzioni:

$$(15)\quad \Phi_h(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^{i-t} u_{h.t}\, \varphi_t(s)\, ds$$

formano un sistema di integrali delle equazioni (3), (4); e come estensione del noto teorema di continuità della derivata normale di doppio strato, si ha che *le espressioni* $X_t$ *relative alle* $\Phi_h(\xi, \eta)$ *hanno valori uguali dalle due bande della linea* C; e precisamente, *supposto che le coordinate dei punti di* C, *considerate come funzioni di* $s$, *siano finite e continue insieme alle loro derivate dei due primi ordini, e che le funzioni* $\varphi_t(s)$ *abbiano le derivate del primo ordine finite e continue in tutto* C, indicando con $n_0$ la normale alla linea C nel punto arbitrario $s_0$, con $\overline{X}_t$ l'espressione $X_t$, relativa alle $\Phi_h(\xi, \eta)$, costruita nel punto $p$ dell'area $\sigma$ rispetto alla direzione $n_0$, con $\overline{\overline{X}}_t$ la medesima espressione costruita nel punto $p'$ dell'area infinita $\sigma'$, si ha che *se esiste uno dei due limiti* $\lim_{p=s_0} \overline{X}_t$, $\lim_{p'=s_0} \overline{\overline{X}}_t$, *esisterà anche l'altro, e tutti e due saranno uguali.*

ESTENSIONE DEGLI STRATI SEMPLICI.

10. Indichiamo con $(\xi, \eta)$ un punto qualsiasi del piano della linea C; e poniamo:

$$\frac{\delta}{\delta n_0} = \frac{\partial}{\partial \xi}\cos \widehat{n_0 x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\cos \widehat{n_0 y} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\cos \widehat{n_0 z},$$

$$w_{h.k} = \left(-\frac{\partial r}{\partial y}\right)^{2i-h-k}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^{h+k-2}\frac{\delta \log r}{\delta n_0}.$$

Le funzioni $w_{h.k}$ godono di proprietà analoghe alle $u_{h.k}$. In particolare gli $i$ sistemi:

$$w_{h.1}, w_{h.2}, \dots, w_{h.i}, \quad (h = 1, 2, \dots, i)$$

considerati come funzioni di $\xi, \eta$, formano $i$ sistemi di integrali delle equazioni (3), (4).

Introducendo l'espressione $w'_{h.k}(s, s_0)$ analoga alla $u'_{h.k}(s, s_0)$, si ha, come estensione del noto teorema di discontinuità delle derivate normali di strato semplice, che *se le coordinate dei punti di* C *hanno le derivate dei due primi ordini rispetto ad s finite e continue, se* $\psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_i(s)$ *sono i funzioni finite e continue dei punti di* C, *sussistono le seguenti formole*:

$$\lim_{p=s_0}\frac{1}{\pi}\int_C \sum_1^{i-t} w_{h.t}\,\psi_t(s)\,ds = -\sum_1^{i-t}\beta_{h.t}\,\psi_t(s_0) + \tag{16}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_C \sum_1^{i-t} w'_{h.t}(s, s_0)\,\psi_t(s)\,ds,$$

$$\lim_{p'=s_0}\frac{1}{\pi}\int_C \sum_1^{i-t} w_{h.t}\,\psi_t(s)\,ds = \sum_1^{i-t}\beta_{h.t}\,\psi_t(s_0) + \tag{17}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_C \sum_1^{i-t} w'_{h.t}(s, s_0)\,\psi_t(s)\,ds.$$

11. Le funzioni $w_{h1}, w_{h2}, \dots, w_{hi}$ sono integrali delle equazioni (3), (4) anche considerate come funzioni di $x, y$; allora, in forza delle condizioni (5) a cui debbono necessariamente soddisfare queste funzioni, quando il punto $(x, y)$ varia in $\sigma$, mentre il punto $(\xi, \eta)$ è nell'area $\sigma'$, e in virtù della (17), risulta:

$$\left\{\begin{aligned} &\beta_{h.\tau}\cos^t \widehat{s_0 x} + \binom{t}{1}\beta_{h.\tau+1}\cos^{t-1}\widehat{s_0 x}\,.\cos\widehat{s_0 y} + \dots + \\ &+\binom{t}{t-1}\beta_{h.\tau+t-1}\cos\widehat{s_0 x}\,.\cos^{t-1}\widehat{s_0 y} + \beta_{h.\tau+t}\cos^t\widehat{s_0 y} + \\ &+\frac{1}{\pi}\int_C\Big\{w'_{h.\tau}(s, s_0)\cos^t\widehat{sx} + \binom{t}{1}w'_{h.\tau+1}(s, s_0)\cos^{t-1}\widehat{sx}\,.\cos\widehat{sy} + \\ &+\dots + w'_{h.\tau+1}(s, s_0)\cos^t\widehat{sy}\Big\}\,ds = 0. \\ &(h = 1, 2, \dots, i\ ;\ t = 1, 2, \dots, i-1\ ;\ \tau = 1, 2, \dots, i-t). \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Osserviamo ancora la formola:

$$w'_{h.t}(s\,,\,s_0) = u'_{h\,t}(s_0\,,\,s)\,. \tag{19}$$

## Risoluzione del problema interno.

12. Si considerino le equazioni integrali:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_t(s_0) = \sum_1^{i}{}_{\tau}\, \beta_{t.\tau}\, \varphi_\tau(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\int_C \sum_1^{i}{}_{\tau}\, u'_{t.\tau}(s\,,\,s_0)\, \varphi_\tau(s)\, ds\,, \\ (t = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,i) \end{array} \right. \tag{20}$$

e i due corrispondenti sistemi omogenei e coniugati:

$$0 = \sum_1^{i}{}_{\tau}\, \beta_{t.\tau}\, \psi_\tau(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \sum_1^{i}{}_{\tau}\, u'_{t.\tau}(s\,,\,s_0)\, \psi_\tau(s)\, ds\,, \tag{21}$$

$$0 = \sum_1^{i}{}_{\tau}\, \beta_{t.\tau}\, \chi_\tau(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \sum_1^{i}{}_{\tau}\, u'_{t.\tau}(s_0\,,\,s)\, \chi_\tau(s)\, ds\,. \tag{21}'$$

*Il determinante delle* $\beta_{t,\tau}$ *è diverso da zero*; sicchè i sistemi (20), (21), (21)′ equivalgono a sistemi di equazioni integrali di $2^a$ specie; e per conseguenza possiamo ad essi applicare i noti teoremi di Fredholm.

In virtù delle (18), (19) si ha che il sistema (21)′ ammette le seguenti $\dfrac{i(i-1)}{2}$ soluzioni linearmente indipendenti:

$$\chi_{h.1}(s) = 0\,,\,\ldots\,,\,\chi_{h.h-1}(s) = 0\;,\;\chi_{h.h}(s) = \cos^t \widehat{sx}\,,$$

$$\chi_{h.h+1}(s) = \binom{t}{1} \cos^{t-1} \widehat{sx}\,.\,\cos \widehat{sy}\,,\,\ldots\,,\,\chi_{h.h+t}(s) = \cos^t \widehat{sy}\,,$$

$$\chi_{h.h+t+1}(s) = 0\,,\,\ldots\,,\,\chi_{h.i}(s) = 0\,;$$

quindi le equazioni integrali (21) ammetteranno almeno $\dfrac{i(i-1)}{2}$ soluzioni linearmente indipendenti. Ora si può dimostrare, usando convenientemente dei teoremi $\alpha$), $\delta$) al § 6, che qualunque altra soluzione delle equazioni integrali (21) è sempre uguale ad una funzione lineare, omogenea ed a coefficienti costanti di queste $\dfrac{i(i-1)}{2}$ soluzioni; quindi il sistema (21)′ ammette solo le $\dfrac{i(i-1)}{2}$ soluzioni scritte sopra; e per conseguenza, in virtù di un noto teorema di Fredholm, *condizione necessaria e sufficiente affinchè il*

*sistema* (20) *ammetta una soluzione è che le funzioni* $a_t(s)$ *soddisfacciano alle relazioni*:

$$(5)' \qquad \begin{cases} \int_C \sum_0^t{}_\tau \, a_{h+\tau}(s) \binom{t}{\tau} \cos^{t-\tau} \widehat{sx} \, . \cos^\tau \widehat{sy} \, ds = 0 \, . \\ (t = 1, 2, \ldots, i-1 \; ; \; h = 1, 2, \ldots, i-t) \end{cases}$$

Ora queste condizioni sono necessarie, se si vuole che le $a_t(s)$ rappresentino i valori nei punti di C di un sistema di integrali delle equazioni (3), (4), considerate nell'area finita $\sigma$. Se le supponiamo soddisfatte, il sistema (20) ammetterà certamente una soluzione; ed è facile dimostrare, in virtù della (13), che *le i funzioni* $\Phi_h(\xi, \eta)$, *ottenute dalle* (15) *col mettere al posto delle* $\varphi_t(s)$ *questa soluzione, risolvono il sistema di equazioni* (A) *per l'area finita* $\sigma$, ossia risolvono il *problema interno.*

### Risoluzione del problema esterno.

13. Consideriamo le equazioni:

$$(22) \qquad \begin{cases} a_t(s_0) = -\sum_1^i{}_\tau \, \beta_{t\tau} \varphi_\tau(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i{}_\tau \, u'_{t\tau}(s, s_0) \, \varphi_\tau(s) \, ds \, , \\ (t = 1, 2, \ldots, i) \end{cases}$$

e i due corrispondenti sistemi omogenei e coniugati:

$$(23) \qquad 0 = -\sum_1^i{}_\tau \, \beta_{t\tau} \psi_\tau(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i{}_\tau \, u'_{t\tau}(s, s_0) \, \psi_\tau(s) \, ds,$$

$$(23)' \qquad 0 = -\sum_1^i{}_\tau \, \beta_{t\tau} \chi_\tau(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i{}_\tau \, u'_{t\tau}(s_0, s) \, \chi_\tau(s) \, ds \, .$$

Anche a queste equazioni sono applicabili i risultati di Fredholm.

Intanto, in forza delle (12)', si ha che il sistema (23) ammette le $\frac{i(i+1)}{2}$ soluzioni linearmente indipendenti:

$$\psi_1^{(\rho,t)}(s) = 0, \ldots, \psi_{\rho-1}^{(\rho,t)}(s) = 0, \psi_\rho^{(\rho,t)}(s) = x^t, \psi_{\rho+1}^{(\rho,t)}(s) = \binom{t}{1} x^{t-1} y, \ldots,$$

$$\psi_{\rho+t-1}^{(\rho,t)}(s) = \binom{t}{t-1} x y^{t-1}, \psi_{\rho+t}^{(\rho,t)}(s) = y^t, \psi_{\rho+t+1}^{(\rho,t)}(s) = 0, \ldots, \psi_i^{(\rho,t)}(s) = 0 \, ;$$

$$(t = 0, 1, \ldots, i-1 \; ; \; \rho = 1, 2, \ldots, i-t)$$

e si può dimostrare che qualunque soluzione del sistema (23) è sempre uguale ad una funzione lineare omogenea ed a coefficienti costanti di queste

$\frac{i(i+1)}{2}$ soluzioni; sicchè il sistema (23)' ammetterà solo $\frac{i(i+1)}{2}$ soluzioni linearmente indipendenti $\chi_1^{(\rho,t)}(s)$, $\chi_2^{(\rho,t)}(s)$, ..., $\chi_l^{(\rho,t)}(s)$. Allora *condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema* (22) *ammetta una soluzione è che le funzioni* $a_t(s)$ *soddisfacciano alle* $\frac{i(i+1)}{2}$ *relazioni:*

$$\int_C \sum_1^i{}_\tau \, a_\tau(s) \, \chi_\tau^{(\lambda,\mu)}(s) \, ds = 0 \,. \tag{24}$$

Supposte soddisfatte queste relazioni, il sistema (22) ammetterà una soluzione, e *le i funzioni* $\Phi_h(\xi, \eta)$, *ottenute dalle* (15) *col porre al posto delle* $\varphi_t(s)$ *questa soluzione, risolveranno il sistema di equazioni* (A) *per l'area infinita* $\sigma'$.

14. Se le $a_t(s)$ non soddisfano alle (24), si determinino $\frac{i(i+1)}{2}$ costanti $a_{\rho,t}$ in modo che, come si può sempre fare, le espressioni:

$$\bar{a}_h(s) = a_h(s) - \sum_{\rho,t} a_{\rho,t} \, u_h^{(\rho,t)}(s)$$

soddisfacciano alle (24). Come al § precedente si avrà un sistema di integrali $\overline{\Phi}_h(\xi, \eta)$ delle equazioni (3), (4) nell'area infinita $\sigma'$, il quale nei punti di C coinciderà col sistema delle funzioni $\bar{a}_h(s)$; dimodochè *il sistema di funzioni:*

$$\overline{\Phi}_h(\xi, \eta) + \sum_{\rho,t} a_{\rho,t} \, u_h^{(\rho,t)}(\xi, \eta)$$

*risolverà in ogni caso il sistema di equazioni* (A) *per l'area infinita* $\sigma'$.

**Matematica.** — *Sull'equazione integrale di 1ª specie.* Nota del Corrispondente G. Lauricella.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Esperimenti intorno all'effetto della luce sulla conducibilità del vapore di ipoazotide* (1). Nota di Mario Tenani, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

È nota la proprietà che possiede la luce. specialmente ultravioletta, di provocare l'emissione di cariche negative dai metalli che vi siano esposti: analogo è l'effetto che la detta luce può produrre sulle molecole di un gas: e, come dice il Thomson (2):

« Se una molecola di un gas perde, a somiglianza di un pezzo di metallo, elettricità negativa quando è esposta alla luce ultravioletta, questa molecola si comporterà come un ione positivo e il corpuscolo negativo che essa ha perduto si unirà a un'altra molecola del gas che agirà come un ione negativo ».

Il gas si troverà quindi ionizzato.

Infruttuosi furono i primi tentativi sull'aria e su altri gas molto trasparenti per l'ordinaria luce ultravioletta (3); e i primi risultati positivi si ebbero soltanto quando si scoprirono speciali radiazioni facilmente assorbibili dai detti gas (4). Queste esperienze confermarono l'opinione, già stabilita dalle osservazioni sui solidi e sui liquidi, che l'effetto foto-elettrico sia in dipendenza immediata di un assorbimento della luce stessa da parte del corpo in esame.

Un gas che si mostrò molto sensibile all'azione della luce (anche non ultravioletta) fu il vapore di sodio, che d'altra parte, come è noto, quando sia piuttosto denso, mostra un complicato aspetto a bande di assorbimento, noto soprattutto per i multiformi studî di cui è stato oggetto, specialmente da parte del Wood (5). Analogo allo spettro di tali vapori è lo spettro di assorbimento della ipoazotide, sebbene in questa l'assorbimento si eserciti già fortemente a una temperatura molto più bassa: alla temperatura ordinaria. Analoghi sono gli effetti che tali spettri subiscono per effetto di una variazione di temperatura, analogo il loro comportamento magneto-ottico. L'analogia che si lascia intravvedere così nel meccanismo dell'assorbimento della luce nei due casi, mi ha incoraggiato a tentare sull'ipoazotide un'esperienza, intorno alle sue proprietà foto-elettriche.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Pisa, diretto dal professor A. Battelli.

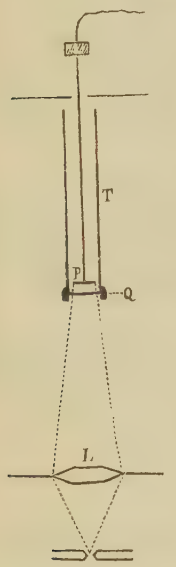
(2) J. J. Thomson, *Conduction of Electricity troug Gases*, 2ª ed., 1906, pag. 252.

(3) Battelli e Garbasso, Nuovo Cim. (4), 3, giugno 1896.

(4) Lenard, Drudes, Ann. 1, 486, 1900.

(5) R. Wood, Physical Optik, New York, 1905.

L'apparecchio usato in tali esperimenti consiste in un disco isolato di platino P, connesso a un paio di quadranti di un elettrometro di Dolezalek (o di un elettroscopio a foglia d'oro) e sostenuto da un filo piuttosto grosso di alluminio entro un tubo di vetro T, il quale poi è chiuso a una estremità da un disco di quarzo Q di circa 5 cm. di diametro, tenuto aderente all'orlo smerigliato del tubo da una ghiera di ottone.




Sul disco facevo cadere un fascio convergente di luce, ottenuto, mediante una lente di quarzo L, dal cratere positivo di un arco voltaico. Il filo supportante il disco era isolato esternamente al tubo con un supporto in zolfo, poichè l'ipoazotide distruggeva rapidamente ogni isolamento interno al tubo condensandosi sopra di esso.

L'ipoazotide era stata accuratamente preparata da me stesso, mediante il riscaldamento del nitrato di piombo, disseccandola su anidride fosforica e liquefacendola poi in tubetti che chiudevo alla fiamma. Il tubo T essendo verticalmente disposto, poche goccie di ipoazotide liquida versate dall'alto si vaporizzavano in fondo ad esso e il vapore restava entro l'apparecchio un tempo sufficiente per compiere la misura, sfuggendo lentamente dall'apertura superiore del tubo.

L'esperienza avveniva misurando la rapidità di scarica del disco in assenza o in presenza dell'ipoazotide. Il disco veniva portato a diverse distanze dalla lastra di quarzo e caricato una volta di segno + e una volta di segno —.

Facendo variare la distanza del disco di platino dalla lastra di quarzo, variava anche la dispersione della carica positiva, riuscendo piccolissima quando il disco si trovava a circa 5 cm. dal quarzo: ciò si spiega coll'osservare che, col crescere della detta distanza, viene a diminuire la carica indotta sul quarzo. Tutto ciò concorda bene con quanto osservarono Elster e Geitel sulla scarica dei corpi carichi di elettricità positiva, per parte dei raggi ultravioletti.

Corrispondentemente ai vari valori dati alla distanza tra il disco e la lastra di quarzo, il tempo impiegato dalla foglia dell'elettroscopio a percorrere 10 divisioni della scala, corrispondenti a un abbassamento del livello potenziale da 110 volts a circa ± 80, è consegnato nella seguente tabella:

| Distanza del disco | Carica + | | Carica — | |
|---|---|---|---|---|
| | senza ipoazotide | con ipoazotide | senza ipoazotide | con ipoazotide |
| mm. 1,5 | min. 2 | min. 1 | sec. 20 | min. 1, sec. 20 |
| » 2 | » 2 sec. 20 | » 1, sec. 10 | » 20 | » 1, » 45 |
| » 4 | » 4 | » 1, » 20 | » 20 | » 2 |

Dalla tabella risulta che la presenza dell'ipoazotide, mentre facilita la scarica dell'elettricità +, tende ad impedire quella dell'elettricità —. Questo ultimo fatto può spiegarsi con l'ammettere che l'ipoazotide assorba la luce non permettendole di arrivare sul disco metallico e la conduzione sia eseguita solo dagli ioni formatisi per azione della luce (assorbita) in seno al gas: e con tale ipotesi ultima, non solo può spiegarsi ancora il primo risultato, ma anche può darsi ragione della maggiore rapidità di scarica del disco carico positivamente che non carico negativamente, pensando alla notevole differenza di velocità, che, anche in casi analoghi, gl' ioni negativi (attratti dal disco carico positivamente) posseggono di fronte a quelli positivi.

Dato l'assorbimento molto forte dell'ipoazotide alla temperatura ordinaria per le radiazioni ultraviolette, è da presumere che gli effetti osservati in sua presenza siano in modo trascurabile alterati sia dalla presenza dell'elettrodo di platino, sia da quello dello strato di elettricità negativa indotto sul quarzo, quando la carica del disco è positiva.

Tanto in presenza dell'ipoazotide, che in sua assenza, una lastra di vetro posta sul percorso dei raggi provenienti dall'arco, basta a far cessare ogni effetto.

**Mineralogia.** — *Studi intorno a minerali sardi: Baritina di Bonvei (Mara) ed Heulandite di colle Giuargada (Villanova-Monteleone).* Nota del dott. Aurelio Serra, presentata dal Socio G. Struever.

**Chimica.** — *Sui nitroderivati aromatici.* Nota di R. Ciusa, presentata dal Socio G. Ciamician.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Cristalli misti fra zolfo e tellurio* (1). Nota di Giovanni Pellini, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una Nota precedente (Questi Rendiconti, vol. XVIII, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 12) avente per titolo: *Contributo allo studio dell'isomorfismo fra il tellurio e lo zolfo*, ho dimostrato mediante l'analisi termica che il tellurio e lo zolfo non formano nessun composto fra loro.

Però diversi indizî mi hanno convinto che la porzione del diagramma delle curve di congelamento dalla parte dello zolfo meritava uno studio più accurato. Avendo notato che le soluzioni diluite di tellurio nello zolfo ottenute per fusione sono di color rosso-arancio trasparenti e che dà essa si ottengono dei cristalli aciculari monoclini trasparenti e rossi, ho pensato che lo zolfo rosso osservato da parecchi autori fosse costituito da cristalli misti di zolfo e tellurio. Infatti, estraendo la massa fusa col solfuro di carbonio si ottiene una soluzione limpida rossa, dalla quale si depositano dei bellissimi cristalli trasparenti, assai più lucenti che non quelli dello zolfo puro: essi contengono del tellurio e la colorazione rossa è più o meno intensa, a seconda del contenuto in tellurio. Anche il selenio in soluzione solida con lo zolfo colora la massa in rosso. Tuttavia la colorazione dei cristalli misti di selenio e zolfo a piccola concentrazione in selenio è di color giallo-aranciato, mentre che i cristalli misti di zolfo e tellurio ad uguale concentrazione sono colorati in rosso aranciato. Tali cristalli misti presentano le seguenti caratteristiche:

1. Quelli ottenuti per raffreddamento della massa fusa hanno abito monoclino, come è stato dimostrato con osservazioni cristallografiche (2).

2. Quelli ottenuti per estrazione con solfuro di carbonio dalla massa fusa, sono trimetrici. Riporto qui le costanti cristallografiche di confronto fra lo zolfo naturale ed artificiale ed i cristalli misti da me preparati contenenti gr. 0,557 di tellurio in 100 gr. di cristalli misti.

Lo zolfo puro (sistema trimetrico) possiede, in base alle misure fatte da Rokscharow [Dana, System of Mineralogy, 1892, pag. 8] sui cristalli naturali, le seguenti costanti:

$$a : b : c = 0{,}81309 : 1 : 1{,}90339.$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova e comunicato nella Sez. X dell'VIII Congresso di Chimica applicata.

(2) Devo ringraziare il prof. Billows dell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Padova, che si è gentilmente prestato ad eseguire le ricerche cristallografiche sui diversi cristalli misti, da me preparati. Il resoconto di tale studio comparirà fra breve nella Rivista di Mineralogia, diretta dal prof. R. Panebianco. Vol. 38.

Le misure di Brezina (1) sui cristalli artificiali dànno le seguenti costanti:

$$a : b : c = 0{,}8108 : 1 : 1{,}9005 .$$

In confronto, i cristalli misti di zolfo e tellurio hanno le seguenti costanti:

$$a : b : c = 0{,}81316 : 1 : 1{,}86929 .$$

Si deve perciò concludere che la variazione delle costanti è piccola e parziale, nel senso che varia sensibilmente il solo parametro $c$: e ciò è una conferma cristallografica della esistenza di isomorfismo tra il tellurio e lo zolfo.

3. Analizzando la composizione complessiva della parte delle miscele fuse estratta dal solfuro di carbonio, si deduce che i cristalli misti del tipo monoclino possiedono una composizione media di 1,9 %, mentre che l'eutectico trovato alla concentrazione atomica di 1 % di tellurio, corrisponde alla concentrazione in peso di 3,86 %.

4. I cristalli ricchi in tellurio estratti dalle masse fuse si alterano rapidamente separando tellurio e zolfo amorfo, insolubile in solfuro di carbonio.

Anche le soluzioni concentrate depositano tellurio. Quando la composizione dei cristalli misti è discesa a 1,2 % di tellurio i cristalli non sono più alterabili. Si tende perciò verso uno stato di equilibrio determinato dalla diminuzione di solubilità a più basse temperature. Venne pure osservato che anche dalle soluzioni limpide in solfuro di carbonio e provenienti dalla estrazione delle masse fuse, si deposita col tempo una sostanza amorfa giallo-rossastra, il che induce a ritenere probabile l'esistenza di una modificazione solubile nel solfuro di carbonio.

5. Costantemente le masse fuse, per quanto la concentrazione in tellurio sia piccola, non sono solubili del tutto nel solfuro di carbonio. Rimane indietro una sostanza amorfa di colore giallo-rosso, che è costituita da una soluzione solida amorfa di tellurio e zolfo: la composizione in tellurio di una di tali masse amorfe risultò 1,54 %. La composizione di tale soluzione solida amorfa tende perciò ad avvicinarsi a quella dei cristalli misti. Ciascun miscuglio a composizione fissa e a percentuale inferiore all'eutectica, fuso completamente e mantenuto a fusione per lungo tempo fra 150°-200°, fornisce sempre la stessa quantità di residuo insolubile in solfuro di carbonio.

*Trasformazione dei cristalli misti allo stato solido.*

È noto che lo zolfo ha un punto di trasformazione a 95°,5 passando da monoclino a trimetrico a più bassa temperatura. Tale punto di trasfor-

(1) Groth. Chem. Kristallographie, pag. 25 e seguenti

mazione è abbassato dal tellurio. Le esperienze vennero eseguite con dei dilatometri, osservando le variazioni del volume a diverse temperature.

Il liquido dilatometrico impiegato fu un olio minerale.

| Miscugli | Per cento Te | Intervallo di trasformazione |
|---|---|---|
| 1 | 0,232 | 93°,5-94°,5 |
| 2 | 0,833 | 90°-93° |
| 3 | 1,178 | 89°-92° |

Dai dati ora riportati si ottiene il diagramma disegnato nella fig. 1.

Vi sono però dati positivi i quali dimostrano che la curva di trasformazione dei cristalli misti deve discendere rapidamente tendendo a divenire parallela all'asse delle temperature. Le prove vengono fornite dalle soluzioni dei cristalli misti nel solfuro di carbonio. Una di tali soluzioni venne concentrata alla temperatura di ebullizione del solvente, poi lasciata evaporare a temperatura ordinaria, finchè tutto il solvente fu eliminato. Dopo alcuni giorni, aderenti alla massa dei grossi cristalli trasparenti e trimetrici, si osservarono alcuni cristalli isolati giallo-rossastri opachi. Questi pochi campioni, insufficienti per una determinazione del loro contenuto in tellurio, vennero misurati al goniometro. Essi sono monoclini — modificazione $\beta$ dello zolfo. Ma poichè sono opachi nella loro massa, vuol dire che a temperatura ordinaria si sono trasformati in un aggregato di cristallini trimetrici. Si tratta di un caso evidente di paramorfosi. Mi riservo di studiare più dettagliatamente le condizioni precise della loro formazione. La quantità media percentuale di tellurio nei cristalli trimetrici risultò di gr. 0,56. Quella dei cristalli monoclini deve necessariamente essere più elevata.

Infine, a completare dal punto di vista teorico il diagramma dal lato dello zolfo è stato segnato anche il campo di esistenza (non esperimentato) dei cristalli misti, che si possono ottenere dalla fusione dello zolfo trimetrico. Poichè il punto di fusione dello zolfo trimetrico viene abbassato, il limite di solubilità dei cristalli misti risulta spostato verso sinistra, come lo indica la parte punteggiata della fig. 1. La temperatura eutectica trimetrica potrebbe essere ritenuta, in base ai dati sperimentali, in media 99°,5.

### *Cristalli misti per soluzione.*

Lo zolfo è solubile in molti solventi nei quali il tellurio non è praticamente solubile: soltanto il ioduro di metilene scioglie, secondo Retgers, una piccola quantità di tellurio (0,1 %); tuttavia la questione è controversa, e Standenmeyer e Gutbier [1] ritengono che si formi una combinazione fra

[1] Zeit. anorg. Chemie, *32*, 42 (1902).

iodio e tellurio. Ma analogamente a quanto si osserva per i cristalli misti di zolfo e selenio, io ho trovato che le soluzioni di zolfo in solfuro di carbonio, benzolo ecc., hanno la proprietà di facilitare la soluzione del tellurio, per quanto in grado assai minore del selenio.

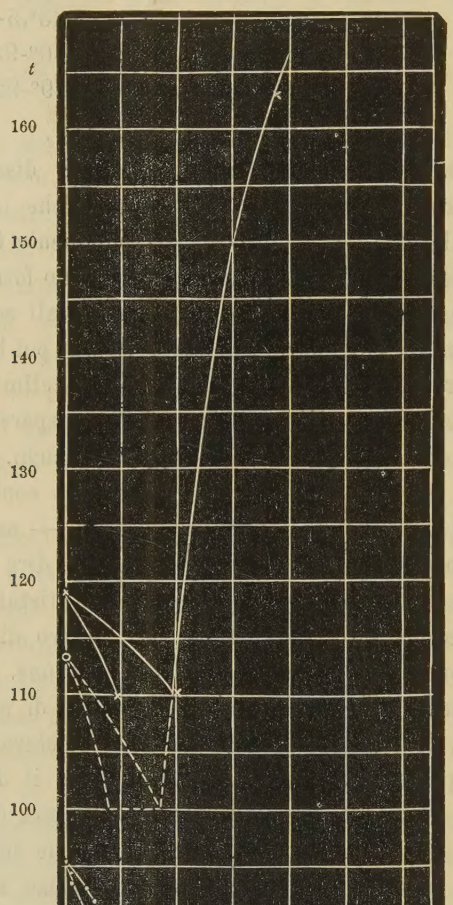



Fig. 1.

Una soluzione satura a 25° di zolfo in solfuro di carbonio, cui si aggiunse del tellurio ottenuto per precipitazione, dopo una continuata ebullizione per dieci giorni, divenne evidentemente rossa. Così dicasi per una soluzione di zolfo nel benzolo.

I cristalli depostisi a 25° dal solfuro di carbonio sono di colore rosso-arancio e contengono gr. 0,174 % di tellurio. I cristalli depositatisi a 25° dal benzolo, sono di colore giallo-rossastro e contengono gr. 0,104 % di tellurio.

Inoltre, i cristalli misti anche a forte percentuale di tellurio, si sciolgono facilmente in tutti i solventi dello zolfo. Dal ioduro di metilene cristallizzano di nuovo con colorazione giallo-intensa: ma la cristallizzazione non è netta. Sotto il campo del microscopio si osservano anche delle masse nerastre, dovute ad una scomposizione. Il presentarsi dei cristalli misti con colorazione gialla per quanto più marcata di quella dei cristalli di puro zolfo, il fatto che la soluzione del tellurio nelle soluzioni di zolfo nei diversi solventi richiede un tempo assai lungo, unito alla poca stabilità del ioduro di metilene spiegano sufficientemente l'errore del Retgers, che affermò che, sotto il campo del microscopio lo zolfo ed il tellurio cristallizzano separati.

Degno di nota è pure il comportamento dei cristalli misti nel bromuro di etilene (p. di ebullizione 131°,6).

Se una soluzione concentrata e bollente viene rapidamente raffreddata, si depositano una quantità di sottilissimi aghi cristallini; essi sono monoclini perchè mostrano estinzione inclinata rispetto all'allungamento fra nicol incrociati a luce parallela. Si trasformano rapidamente a temperatura ordinaria e tale trasformazione è seguibile sotto il campo del microscopio, perchè scompare l'estinzione.

Vennero infine preparati dei cristalli misti di zolfo e tellurio aventi la composizione del campione di zolfo rosso del Giappone analizzato da Divers e Scimidzu (0,17 % Te), e dei cristalli misti di selenio e zolfo nelle proporzioni di detto campione (0,06 % Se) ed altri nella proporzione uguale a quella in tellurio (0,17 % Se). Dalla osservazione delle singole colorazioni sotto uguale spessore, si deduce che la colorazione rossa è prevalentemente da attribuirsi al tellurio.

## Conclusioni.

1. Lo zolfo ed il tellurio, in base ai dati dell'analisi termica e nelle condizioni sperimentali da me seguìte, non formano nessun composto fra loro: dànno luogo ad una serie di cristalli misti verosimilmente dalla sola parte dello zolfo.

2. Il tellurio forma cristalli misti isomorfi con lo zolfo tanto nel sistema trimetrico che nel monoclino.

3. Esiste una soluzione solida amorfa di tellurio e zolfo insolubile in solfuro di carbonio: inoltre dalle soluzioni in solfuro di carbonio si deposita oltre a cristalli misti, anche una miscela solida amorfa.

4. I cristalli misti si formano oltre che per fusione anche per soluzione.

5. Lo zolfo rosso del Giappone è verosimilmente una miscela isomorfa dei tre elementi: zolfo, selenio, tellurio.

6. La posizione del tellurio nel gruppo sesto del sistema periodico, riceve da questo primo caso constatato di isomorfismo fra esso e lo zolfo, un nuovo appoggio. L'isomorfismo dei tre elementi S, Se, Te è definitivamente stabilito.

Chimica. — *Influenza delle impurità sui limiti inferiori della cristallizzazione.* Nota di M. Padoa e L. Mervini, presentata dal Socio G. Ciamician.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. M.